1964 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. XVI, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя

А. Н. Шарковский

Всякая непрерывная функция действительного переменного $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, порождает непрерывное преобразование T прямой в себя: $x \to f(x)$. Свойства преобразования T определяются в основном структурой множества неподвижных точек преобразования T.

Напомним, что точку α называют неподвижной точкой порядка k преобразования T, если $T^k\alpha = \alpha$, $T^j\alpha \neq \alpha$, $1 \leqslant j < k$. Точки $T\alpha$, $T^2\alpha$, ..., $T^{k-1}\alpha$ также являются неподвижными порядка k и вместе с точкой α составляют цикл порядка k.

В этой работе исследуется вопрос о зависимости между существованием циклов различных порядков.

Основной результат настоящей работы может быть сформулирован в следующей форме. Рассмотрим множество натуральных чисел, в котором введено отношение: n_1 предшествует n_2 ($n_1 \preceq n_2$), если для всякого непрерывного преобразования прямой в себя существование цикла порядка n_1 влечет за собой существование цикла порядка n_2. Такое отношение, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, и, следовательно, множество натуральных чисел с этим отношением есть квазиупорядоченное множество*. Ниже доказывается

Теорема. *Введенное отношение превращает множество натуральных чисел в упорядоченное множество и притом упорядоченное следующим образом*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \ldots \prec 3\cdot 2 \prec 5\cdot 2 \prec \ldots \prec 3\cdot 2^2 \prec 5\cdot 2^2 \prec \ldots \prec \\ \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1. \qquad (*)$$

Терминологией упорядоченных множеств в дальнейшем мы пользоваться не будем. Доказательства теорем по существу опираются только на теорему Больцано—Коши о промежуточном значении.

Из непрерывности преобразования T сразу вытекает, что *если у преобразования T существует цикл порядка $k > 1$, то преобразование T имеет и неподвижную точку первого порядка.*

Теорема 1. *Если преобразование T имеет цикл порядка $k > 2$, то оно имеет и цикл второго порядка***.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — точки цикла, причем $T\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $T\alpha_k = \alpha_1$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_i \ (i \neq 1)$, $\alpha_r > \alpha_i \ (i \neq r)$. Рассмотрим интервал (α_1, α_{r-1}) (считаем, что $r > 2$; если $r = 2$, следует взять интер-

---

* Г. Биркгоф, Теория структур, Гостехиздат, М., 1952, стр. 16—21.

** Это утверждение содержится в [1]. Здесь дается более четкое его доказательство.

вал (α_k, α_r)). В зависимости от того, существуют на (α_1, α_{r-1}) неподвижные точки первого порядка или нет, через β обозначим либо ближайшую к α_{r-1} неподвижную точку первого порядка, либо точку α_1 (ближайшая к α_{r-1} точка, если на (α_1, α_{r-1}) есть неподвижные точки первого порядка, существует в силу непрерывности T). Поскольку $T\alpha_{r-1} = \alpha_r > \alpha_{r-1}$, то $Tx > x$ для $x \in (\beta, \alpha_{r-1}]$. Если β — неподвижная точка первого порядка, то, как нетрудно видеть, для любого целого $j > 0$ найдется такая окрестность точки β, что для всякого $x > \beta$ из этой окрестности $T^j x > x$. Если $\beta = \alpha_1$, то при $0 < j < k$ $T^j\beta = \alpha_{j+1} > \alpha_1 = \beta$. С другой стороны, $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. Следовательно, на интервале (β, α_{r-1}) в силу непрерывности преобразования T найдется точка γ такая, что $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$. Так как $T\gamma \neq \gamma$, то γ есть неподвижная точка порядка l, где $1 < l \leqslant k - r + 2 < k$. А раз всегда существует неподвижная точка порядка меньшего k, но большего единицы, то всегда существует и неподвижная точка второго порядка.

Формулировке и доказательству последующих утверждений предпошлем следующие достаточно тривиальные леммы, доказательство которых приводится лишь для полноты.

Лемма 1. *Если $T^p\alpha = \alpha$ и точка α является неподвижной точкой порядка k преобразования T, то p кратно k.*

Действительно, если α — неподвижная точка порядка k, то $T^k\alpha = \alpha$, $T^j\alpha \neq \alpha$, $j < k$. Пусть $p = ks + r$, $r < k$. Если предположить, что $r \neq 0$, то $T^r\alpha \neq \alpha$ и $T^p\alpha = T^r \underbrace{T^k \dots T^k}_{s \text{ раз}}\alpha \neq \alpha$.

Лемма 2. *Если для прговбразования T α есть неподвижная точка порядка $k = 2^n l$, где l нечетно, то для прговбразования $S = T^{2^m}$ точка α является неподвижной точкой порядка*

$$q = \begin{cases} 2^{n-m}l, & \text{если } n \geqslant m, \\ l, & \text{если } n \leqslant m. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 1 $T^p\alpha = \alpha$ только при $p = ki$, $i = 1, 2, \dots$ Предполагая, что α есть неподвижная точка преобразования S, найдем ее порядок q. В этом случае $S^q\alpha = \alpha$, $S^j\alpha \neq \alpha$, $1 \leqslant i < q$. Так как $S^q = T^{2^m q}$, то $S^q\alpha = \alpha$ тогда и только тогда, когда $2^m q = ki$, где i — натуральное число. Отсюда $q = \frac{k}{2^m} i$. Наименьшее значение i, при котором правая часть будет целым числом, и соответствует искомому значению q. В самом деле, при этом значении q, как нетрудно видеть, $S^q\alpha = \alpha$, $S^j\alpha \neq \alpha$, когда $j < q$.

Если $k = 2^n l$, где l нечетно, то $q = 2^{n-m} li$. При $n \geqslant m$ $i = 1$ и, значит, $q = 2^{n-m}l$. При $n < m$ $i = 2^{m-n}$, т. е. $q = l$.

Следствие. При предположениях леммы 2, если $l > 1$, неподвижная точка α для преобразования S имеет порядок выше второго.

Лемма 3. *Точка α является неподвижной точкой порядка 2^m преобразования T тогда и только тогда, когда $T^{2^m}\alpha = \alpha$, $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$.*

Необходимость условий очевидна.

Достаточность. Если $T^{2^m}\alpha = \alpha$, α может быть неподвижной точкой порядка 2^j, $j = 0, 1, \dots, m$ (лемма 1). Так как $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$, то и $T^{2^j}\alpha \neq \alpha$ при любом $j < m - 1$, поскольку $T^{2^{m-1}} = \underbrace{T^{2^j}(T^{2^j} \dots T^{2^j}) \dots)}_{2^{m-j-1} \text{раз}}$.

Таким образом, α есть неподвижная точка порядка 2^m.

Теорема 2. *Если преобразование T имеет цикл порядка 2^n, $n > 1$, то у преобразования T имеются циклы порядка 2^i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$**.

Пусть α — неподвижная точка порядка 2^n. Покажем, что T имеет неподвижную точку порядка 2^m, $1 \leqslant m < n$.

Положим $T^{2^{m-1}} = S$. Согласно лемме 2 точка α для преобразования S является неподвижной точкой порядка 2^{n-m+1}, т. е. выше второго. По теореме 1 у S найдется неподвижная точка β второго порядка: $S^2\beta = \beta$, $S\beta \neq \beta$. Следовательно, $T^{2^m}\beta = \beta$, $T^{2^{m-1}}\beta \neq \beta$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если преобразование T имеет цикл порядка k, причем k отлично от степени двойки, то у преобразования T имеются циклы порядка 2^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$*

Пусть α — неподвижная точка порядка k. Покажем, что у T существует неподвижная точка β порядка 2^m, где $m \geqslant 1$.

Положим $T^{2^{m-1}} = S$. По следствию из леммы 2 точка α является для преобразования S неподвижной точкой порядка выше второго. В силу теоремы 1 у S найдется неподвижная точка β второго порядка. Итак, $S^2\beta = \beta$, $S\beta \neq \beta$, т. е. $T^{2^m}\beta = \beta$, $T^{2^{m-1}}\beta \neq \beta$.

Из теоремы 3 вытекает, что существуют преобразования, имеющие циклы сколь угодно высокого порядка, поскольку преобразование, имеющее цикл заданного порядка, в частности отличного от степени двойки, всегда легко построить.

Теорема 3 показывает также, что достаточно функцию $f(x)$, задающую преобразование T, зафиксировать в конечном числе точек (образующих цикл), например в трех, и будет существовать бесконечно много циклов независимо от того, как мы будем менять (непрерывным образом) значения $f(x)$ в остальных точках прямой.

Рассмотрим множество неподвижных точек, образующих один цикл. Пусть точки α_1, $\alpha_2 = T\alpha_1, \ldots, \alpha_k = T\alpha_{k-1}$ образуют цикл k-го порядка. Разобьем точки цикла на два множества M_1 и M_2 такие, что $\alpha_i \in M_1$, если $\alpha_i < T\alpha_i$, и $\alpha_i \in M_2$, если $\alpha_i > T\alpha_i$. Пусть $\alpha^{M_1} = \max\limits_{\alpha_i \in M_1} \alpha_i$, $\alpha_{M_2} = \min\limits_{\alpha_i \in M_2} \alpha_i$. Могут представиться два случая: либо $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$, либо $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$.

Лемма 4. *Если $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$, то преобразование T имеет циклы любого порядка.*

Выберем из всех точек, принадлежащих M_1 и больших α_{M_2}, ту, в которой значение функции $f(x)$, задающей преобразование T, является наибольшим. Обозначим ее через β. Поскольку $T\alpha_{M_2} < \alpha_{M_2}$, $T\beta > \beta$, множество всех неподвижных точек первого порядка на интервале (α_{M_2}, β) есть множество непустое и замкнутое (в силу непрерывности преобразования T). Пусть точка γ является наибольшей на этом интервале неподвижной точкой первого порядка. Тогда $T\gamma = \gamma$ и $Tx > x$ на $(\gamma, \beta]$. Интервал $(\gamma, T\beta]$ выбран так, что он содержит неподвижные точки данного цикла (например β, $T\beta$). Так как при последовательном применении преобразования T к какой-либо точке цикла цикл должен замкнуться, то на $(\gamma, T\beta]$ должна существовать по крайней мере одна точка δ цикла такая, что либо $T\delta > T\beta$, либо $T\delta < \gamma$. Первое из неравенств невозможно. Действительно, если $\delta \in M_2$, то $T\delta < \delta < T\beta$, если $\delta \in M_1$, то $T\delta < T\beta$ в силу выбора точки β. Итак, на $(\gamma, T\beta]$ существует точка δ цикла, для которой $T\delta < \gamma$ (возможно, $\delta = T\beta$). Так как на $(\gamma, \beta]$ $Tx > x$, то точка $\delta \in (\beta, T\beta]$. Полученная схема (рис. 1): $T\gamma = \gamma$, $Tx > x$ на $(\gamma, \beta]$, $\delta \in (\beta, T\beta]$ и $T\delta < \gamma$ (назовем ее L-схемой) и обеспечивает существование циклов всех порядков.

В самом деле, $T(\gamma, \beta] \supset (\gamma, T\beta]$**, и, значит, на $(\gamma, \beta]$ существует

* Утверждения теорем 2 и 3 приведены в [2].

** Под $T(\gamma, \beta]$ понимается множество образов точек, принадлежащих $(\gamma, \beta]$.

непустое замкнутое множество точек, которые T преобразует за один шаг в точку δ. Наименьшую из них обозначим δ_1. Аналогично, так как $T(\gamma, \delta_1] = (\gamma, \delta]$, на $(\gamma, \delta_1]$ существует непустое замкнутое множество точек, переводимых T за один шаг в точку δ_1. Наименьшую из них обозначим δ_2. Очевидно, $\gamma < \delta_2 < \delta_1$ и $T(\gamma, \delta_2] = (\gamma, \delta_1]$. Продолжая процесс построения точек δ_i, получаем последовательность $\delta > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_{i-1} > \delta_i > \ldots > \gamma$, причем $T\delta_i = \delta_{i-1}$. Очевидно, $T^i\delta_{i-1} = T\delta$, $T^i\delta_i = \delta$.

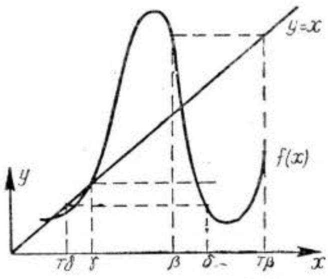

Рис. 1.

Итак, $T^i\delta_i > \delta_i$, $T^i\delta_{i-1} < \delta_{i-1}$ и в силу непрерывности преобразования T^i на интервале (δ_i, δ_{i-1}) существует по крайней мере одна точка ϱ_i такая, что $T^i\varrho_i = \varrho_i$. Поскольку $T^j(\gamma, \delta_{i-1}] = (\gamma, \delta_{i-j-1}] \subset (\gamma, \delta_1]$ при $j < i-1$ и на $(\gamma, \delta_1]$ $Tx > x$, то $T^jx > x$ на $(\gamma, \delta_{i-1}]$ при $1 \leqslant j < i$. Значит, $T^j\varrho_i \neq \varrho_i$, когда $1 \leqslant j < i$, т. е. ϱ_i есть неподвижная точка i-го порядка.

Лемма доказана.

Замечание. Если существует неподвижная точка первого порядка, которая меньше α^{M_1} (но больше $\alpha_{\min} = \min\limits_{i=1,2,\ldots,k} \alpha_i$), то у преобразования T можно выделить, как и выше, L-схему. Отсюда следует, что преобразование T, независимо от расположения точек цикла, имеет циклы любого порядка.

Если существует неподвижная точка первого порядка, которая больше α_{M_2} (но меньше $\alpha_{\max} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,k} \alpha_i$), то у преобразования T можно выделить схему, представляющую собой отображение L-схемы относительно точки γ как центра. Аналогично тому, как и при доказательстве леммы 4, показывается, что такая схема также гарантирует существование циклов всех порядков.

Перейдем к случаю, когда $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$. Имеет место

Лемма 5. *Если $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ и существует такая точка $\alpha \in M_1$, что и $T\alpha \in M_1$, то преобразование T имеет циклы нечетных порядков, больших k, и всех четных порядков.*

Лемма справедлива и при $\alpha \in M_2$, $T\alpha \in M_2$.

Начнем с выделения схемы, которая и приведет к доказательству леммы.

Пусть $n = \min\limits_{\substack{T^j\xi < \alpha \\ \xi \in M_1,\ \xi > T\alpha}} j$ и β — та из точек ξ, для которых достигается min (или, если таких точек несколько, одна из них). Итак, $T^n\beta = \gamma \leqslant \alpha$, $T^i\beta > \alpha$, $i < n$. Рассмотрим последовательность $T\beta, T^2\beta, T^3\beta, \ldots$. Пусть $T^l\beta$ — первая точка этой последовательности, принадлежащая M_1. Легко видеть, что $T^l\beta < T\alpha$. В самом деле, если бы было $T^l\beta > T\alpha$ (очевидно, $T^l\beta \neq T\alpha$), то тогда указанный выше $\min j$ должен был бы быть меньше n. Так как $T\beta > \beta \geqslant T\alpha$, то $T\beta \in M_2$, и, значит, $l \geqslant 2$. Обозначим точку $T^{l-1}\beta$ через δ. Точка $\delta \in (\beta, T\beta]$ и $T\delta < T\alpha$. Проведенные рассуждения свелись к построению картинки, представленной на рис. 2. Полученную схему назовем M-схемой.

Рассмотрим интервал $[\beta, \delta]$ (рис. 3). Пусть точка η — наибольшая из тех точек x интервала, для которых $Tx = T\beta$ (возможно, $\eta = \beta$). На интервале (η, δ) $Tx < T\beta$. Поскольку $T\eta = T\beta \geqslant \delta$, $T\delta < T\alpha \leqslant \eta$, то на (η, δ) существует по крайней мере одна точка ζ такая, что $T\zeta = \eta$. Если подобных точек на интервале $[\eta, \delta]$ более одной, будем считать, что ζ — наименьшая из них. Таким образом, $T\eta = T\beta$, $T\zeta = \eta$ и для всех $x \in (\eta, \zeta)$ $\eta < Tx < T\beta$. Далее на интервале $[\eta, \zeta]$ возьмем точку ξ, наибольшую из тех точек x, для которых $Tx = \zeta$. Для всех $x \in (\xi, \zeta)$ $\eta < Tx < \zeta$.

Для большой наглядности дальнейших рассуждений построим примерный график функции $f(f(x))$ на интервале $[\xi, \zeta]$ (рис. 4). Имеем: $T^2\xi = \eta < \xi$, $T^2\zeta = T\beta > \zeta$, $\eta < T^2x < T\beta$ на (ξ, ζ). Пусть $\omega_1 \leqslant \omega_2$ — соответственно наименьшая и наибольшая из тех точек интервала $[\xi, \zeta]$, в которых $T^2x = x$. Очевидно, $T\omega_1 = \omega_2$, $T\omega_2 = \omega_1$, т. е. ω_1 и ω_2 образуют цикл второго порядка, или, если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то ω — неподвижная точка первого порядка*. Более того, $T(\xi, \omega_1) = (\omega_2, \zeta)$, $T(\omega_2, \xi) = (\eta, \omega_1)$.

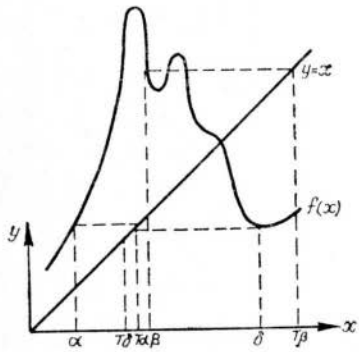

Рис. 2.

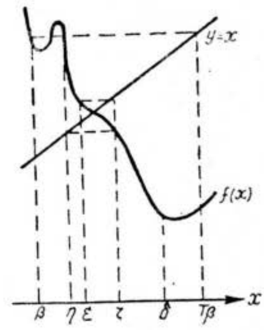

Рис. 3.

Аналогично тому, как делалось выше для L-схемы, построим последовательность $\zeta = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \ldots > \omega_2$ такую, что $T^2\theta_i = \theta_{i-1}$, $T^2(\omega_2, \theta_i) = (\omega_2, \theta_{i-1})$, и последовательность $\xi = \varkappa_0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \omega_1$ такую, что $T^2\varkappa_i = \varkappa_{i-1}$, $T^2(\varkappa_i, \omega_1) = (\varkappa_{i-1}, \omega_1)$. Следовательно, $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = (\eta, \omega_1)$ и $T^{2i+2}(\varkappa_i, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$.

Поскольку $T\alpha < \eta$, $T\eta = T\beta > \zeta$, на интервале (α, η) существуют точки, значение функции $f(x)$ в которых равно $\omega_1, \omega_2, \eta, \theta_i, \varkappa_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Всегда найдутся такие точки λ_1, λ_2, μ_0, $\nu_{-1} \in (\alpha, \eta)$, что $T\lambda_1 = \omega_1$, $T\lambda_2 = \omega_2$, $T\mu_0 = \theta_0 = \zeta$, $T\nu_{-1} = \eta$ и $T(\nu_{-1}, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$, $T(\lambda_2, \omega_0) = (\omega_2, \zeta)$. Далее можно найти точки μ_i, $i = 1, 2, \ldots$, так, чтобы $T\mu_i = \theta_i$, $T(\lambda_2, \mu_i) = (\omega_2, \theta_i)$, и точки ν_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $T\nu_i = \varkappa_i$, $T(\nu_i, \lambda_1) = (\varkappa_i, \omega_1)$. Очевидно, $T^{2i+2}\mu_i = \eta$, $T^{2i+2}(\lambda_2, \mu_i) = (\eta, \omega_1)$ и $T^{2i+3}\nu_i = \eta$, $T^{2i+3}(\nu_i, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$.

Так как $T\eta = T\beta$, то $T^n\eta = \gamma$ (n — наименьшее положительное число такое, что $T^n\beta \leqslant \alpha$). Для того чтобы перейти от одной точки цикла к другой, нужно не более $k - 1$ шагов, и поэтому $n \leqslant k - 1$. Нетрудно видеть, если $\gamma = \alpha$, $\beta = T\alpha$, то $n = k - 1$.

Покажем, что преобразование T имеет неподвижные точки нечетного порядка, большего k. Пусть n четно. В этом случае $n + 2i + 3$ $(i \geqslant 0)$ нечетно и существует неподвижная точка порядка $s = n + 2i + 3$. В самом деле, $T^s\lambda_1 = \omega_1 > \lambda_1$, $T^s\nu_i = \gamma < \nu_i$, и, значит, на интервале (ν_i, λ_1) существуют точки x такие, что $T^sx = x$. Пусть ϱ_s — наибольшая из них. Утверждается, что ϱ_s — неподвижная точка порядка s. Так как s нечетно, то ϱ_s может быть лишь точкой нечетного порядка (лемма 1). Предположим, что ϱ_s — неподвижная точка порядка r, где $r < s$ и нечетно. Точка $T\varrho_s \in (\varkappa_i, \omega_1)$, и найдется такая точка $\pi' \in (\varkappa_{i+\frac{s-r}{2}}, \omega_1)$, что $T^{s-r}\pi' = T\varrho_s$.

* В самом деле, $T\omega_2 \geqslant \omega_1$, так как $T^2(T\omega_2) = T\omega_2$, и, значит, $T\omega_2 \overline{\in} (\xi, \omega_1)$. Аналогично, $T\omega_1 \leqslant \omega_2$. Поэтому $T[\xi, \omega_1] \supseteq [\omega_2, \zeta]$ и на $[\xi, \omega_1]$ найдется точка χ такая, что $T\chi = \omega_2$. Для любого $x \in [\xi, \omega_1]$ $T^2x \leqslant x$. Таким образом, $\chi \geqslant T^2\chi = T\omega_2 \geqslant \chi$, откуда $T^2\chi = \chi$, т. е. $\chi = \omega_1$.

Поскольку $T^2x<x$ на $(\varkappa_j, \omega_1)$, $j=0, 1, 2, 3, \ldots$, и $T^{s-r} = \underbrace{T^2(T^2 \ldots T^2)}_{\frac{s-r}{2} \text{ раз}} \ldots)$,

то $T\varrho_s < \pi' < \omega_1$. Существует точка π'' такая, что $\varrho_s < \pi'' < \lambda_1$ и $T\pi'' = \pi'$. Итак, $\varrho_s < \pi'' < \lambda_1$ и $T^s\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}T\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}\pi' = T^{r-1}T\varrho_s = T^r\varrho_s = \varrho_s < \pi''$, и, значит, на интервале (π'', λ_1) существует точка ϱ_s', в которой $T^s\varrho_s' = \varrho_s'$; $\varrho_s < \varrho_s'$, а это противоречит тому, что ϱ_s — наибольшая из всех точек $x \in (\nu_i, \lambda_1)$ таких, что $T^sx = x$. Нечетное число $s = n + 3$ $(i = 0)$ всегда не превосходит наименьшего нечетного числа, большего

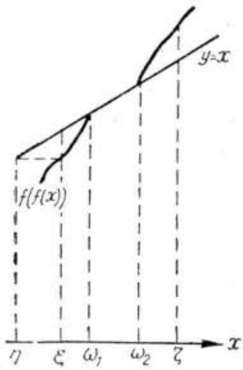

Рис. 4.

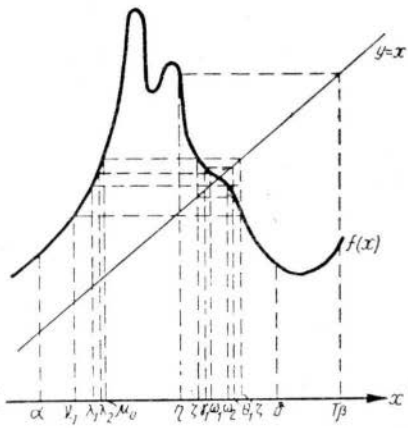

Рис. 5.

k, и, следовательно, при четном n существование неподвижных точек нечетного порядка, большего k, доказано.

Если бы n было нечетным, нужно было бы вместо последовательности $\{\nu_i\}$ воспользоваться последовательностью точек μ_i.

Покажем теперь, что преобразование T имеет неподвижные точки любого четного порядка. Пусть n четно. В этом случае следует использовать последовательность $\{\mu_i\}$. Положим, $s = n + 2i + 2$; $T^s\lambda_2 = \omega_2 > \lambda_2$, $T^s\mu_i = \gamma < \mu_i$, и, значит, на интервале (λ_2, μ_i) существуют точки x такие, что $T^sx = x$. Пусть σ_s — одна из этих точек. Утверждается, что при $s \geqslant 2k - 2$ σ_s есть неподвижная точка порядка s. В самом деле, так как $T^s\sigma_s = \sigma_s$, то σ_s есть либо неподвижная точка s-го порядка, либо неподвижная точка меньшего порядка r, которому кратно s (лемма 1). Очевидно, $r \leqslant \frac{s}{2}$, и поэтому, если $T^j\sigma_s \neq \sigma_s$ при $1 \leqslant j \leqslant \frac{s}{2}$, то σ_s — неподвижная точка порядка s. На интервале (λ_2, μ_i) $T^jx > \eta > x$ при любом $1 \leqslant j < s - n$, так как $T^j(\lambda_2, \mu_i) \subset (\eta, \zeta)$, когда $j < s - n$. Таким образом, при $s - n \geqslant \frac{s}{2}$ точка σ_s есть неподвижная точка порядка s. А последнее неравенство всегда выполняется при $s \geqslant 2k - 2$.

Аналогично доказывается существование неподвижных точек четного порядка $s \geqslant 2k - 2$ при нечетном n, но уже с помощью точек ν_i.

Остается показать, что T имеет неподвижные точки четного порядка, меньшего $2k - 2$. Прежде чем завершить доказательство леммы 5 докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Если преобразование T имеет цикл нечетного порядка, то оно имеет циклы любого четного порядка.*

Рассмотрим множества M_1 и M_2. Если $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$, то существуют циклы всех порядков (лемма 4). Пусть $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$. Точки цикла нечетного порядка для преобразования $S=T^2$ также будут составлять цикл k-го порядка (лемма 2). Для преобразования S можно составить аналогично множествам M_1 и M_2 множества M_1^2 и M_2^2, считая, что точка $\alpha_i \in M_1^2$, если $\alpha_i < T^2\alpha_i$, и $\alpha_i \in M_2^2$, если $\alpha_i > T^2\alpha_i$. Пусть $\alpha^{M_1^2}$ — наибольшая точка из M_1^2, $\alpha_{M_2^2}$ — наименьшая точка из M_2^2. Покажем, что преобразование S имеет циклы всех порядков.

Поскольку $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$, то у преобразования T есть неподвижная точка γ первого порядка такая, что $\alpha^{M_1} < \gamma < \alpha_{M_2}$. Эта точка является непо-

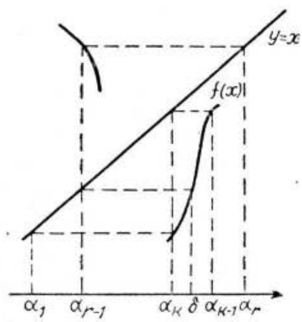

Рис. 6.

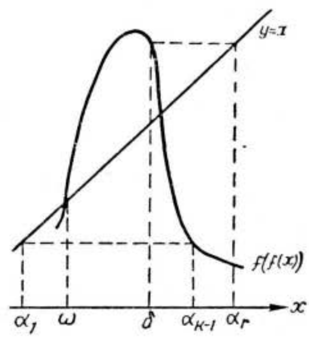

Рис. 7.

движной точкой первого порядка и для преобразования $S=T^2$. Если $\alpha^{M_1^2} \neq \alpha^{M_1}$ (а значит, и $\alpha_{M_2^2} \neq \alpha_{M_2}$), то либо $\alpha^{M_1^2} \in M_2$ и $\gamma < \alpha^{M_1^2}$, либо $\alpha_{M_2^2} \in M_1$ и $\gamma > \alpha_{M_2^2}$. Остается воспользоваться замечанием к лемме 4.

Пусть $\alpha^{M_1^2} = \alpha^{M_1}$, а значит, и $\alpha_{M_2^2} = \alpha_{M_2}$, $M_1^2 = M_1$, $M_2^2 = M_2$. Пусть точка α_1 — наименьшая из всех точек α_i, $i=1,2,\ldots,k$. Тогда $\alpha_k \in M_2$. Так как $\alpha_{k-1} > \alpha_1$, то $\alpha_{k-1} \in M_2^2$, и, следовательно, $\alpha_{k-1} \in M_2$. Таким образом, $\alpha_{k-1} > \alpha_k$. Пусть точка α_r — наибольшая из всех точек α_i, $i = 1,2,\ldots,k$. Точка $\alpha_{r-1} \in M_1$ и, значит, $\alpha_1 < \alpha_{r-1} < \alpha_k$. Поскольку на интервале (α_k, α_{k-1}) функция $f(x)$ принимает по крайней мере все значения из интервала (α_1, α_k), на (α_k, α_{k-1}) найдется точка δ такая, что $T\delta = \alpha_{r-1}$. Наконец, пусть ω — наибольшая из тех точек $x \in [\gamma, \delta)$, для которых $Sx = x$ (на $[\gamma, \delta)$ по крайней мере одна точка такая, что $Sx = x$, существует, поскольку $S\gamma = \gamma$).

Итак, имеем: $S\omega = \omega$, $S\delta = \alpha_r > \delta$, $Sx > x$ на $(\omega, \delta]$, $\alpha_{k-1} \in (\delta, \alpha_r)$ и $S\alpha_{k-1} = \alpha_1 < \omega$. Нам удалось у преобразования S выделить L-схему (см. доказательство леммы 4), которая и обеспечивает существование у S циклов всех порядков.

Из того, что преобразование S имеет циклы всех порядков, сразу вытекает существование циклов четного порядка у преобразования T. Покажем, например, что преобразование T имеет цикл порядка $l = 2l_1$.

Пусть точка α есть неподвижная точка порядка l_1 преобразования S. Это означает, что $S^{l_1}\alpha = \alpha$ и $S^{j_1}\alpha \neq \alpha$, $1 \leqslant j_1 < l_1$, т. е. $T^l\alpha = \alpha$ и $T^j\alpha \neq \alpha$, где j — любое четное число, меньшее l. Так как $S\alpha \neq \alpha$, то и $T\alpha \neq \alpha$. Следовательно, либо точка α есть неподвижная точка порядка l преобразования T, либо точка α есть неподвижная точка нечетного порядка l_2 (но не первого), причем $l_2 \leqslant l_1$*. Но для цикла нечетного порядка всегда выполняются условия либо леммы 4, либо леммы 5. Действительно, так как цикл содержит нечетное число точек, то либо в M_1 их больше, либо в M_2. Пусть для определенности в M_1 больше то-

* Из леммы 2, вообще говоря, вытекает, что для преобразования T точка α есть неподвижная точка порядка $2l_1$, если l_1 четно, и $2l_1$ или l_1, если l_1 нечетно.

чек, чем в M_2. Тогда обязательно в M_1 найдется точка μ такая, что $T\mu \in M_1$, так как в противном случае количество точек в M_1 не могло бы превышать число точек в M_2. Итак, поскольку для преобразования T, имеющего цикл порядка l_2, выполняются условия либо леммы 4, либо леммы 5, то T должно иметь циклы четного порядка $\geqslant 2l_2 - 2$, а значит, и порядка l. Лемма 6 доказана.

Этим самым завершается и доказательство леммы 5. Поскольку при ее доказательстве уже установлено существование циклов нечетного порядка (большего k), то, следовательно, существуют циклы и всех четных порядков.

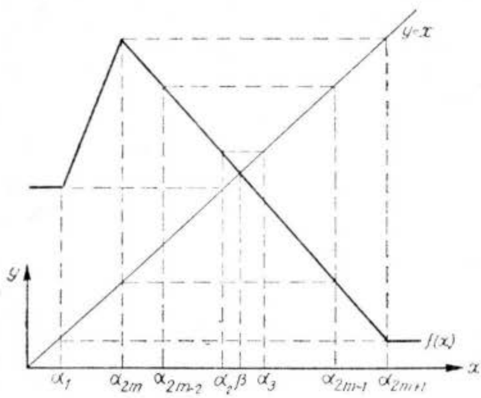

Рис. 8.

В силу всего выше сказанного имеет место

Теорема 4. *Если преобразование T имеет цикл нечетного порядка k, то оно имеет циклы нечетных порядков, больших k, и всех четных порядков.*

Теорему 4 нельзя усилить. Сейчас будет построен пример преобразования T, имеющего цикл порядка $2m+1$, но не имеющего циклов порядка $2j-1$, $j = 2, 3, \ldots, m$.

Пусть точки α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, образуют цикл порядка $2m+1$, причем $\alpha_{i+1} = T\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, $\alpha_1 = T\alpha_{2m+1}$, и пусть $\alpha_1 < \alpha_{2m} < \alpha_{2m-2} < \ldots < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_{2m+1}$. Предполагаем, что непрерывная функция $f(x)$, задающая преобразование T, при $x \leqslant \alpha_1$ равна α_2, при $x \geqslant \alpha_{2m+1}$ равна α_1, а при $\alpha_1 \leqslant x < \alpha_{2m+1}$ — кусочно-линейная функция с вершинами в точках (α_1, α_2), (α_2, α_3), $\ldots$, $(\alpha_{2m}, \alpha_{2m+1})$, $(\alpha_{2m+1}, \alpha_1)$ плоскости (x, y).

Нетрудно проверить, что

$$T^{2j-1}(\alpha_1, \alpha_{2m}] = (\alpha_{2j}, \alpha_{2m+1}],$$

$$T^{2j-1}(\alpha_{2i+2}, \alpha_{2i}] = \begin{cases} [\alpha_{2(i+j)-1}, \alpha_{2(i+j)+1}), & \text{если } 2 \leqslant i+j \leqslant m, \\ (\alpha_{2(i+j-m)}, \alpha_{2m+1}], & \text{если } m+1 \leqslant i+j \leqslant 2m-1, \end{cases}$$

$$T^{2j-1}[\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+3}) = \begin{cases} (\alpha_{2(i+j)+2}, \alpha_{2(i+j)}], & \text{если } 2 \leqslant i+j \leqslant m-1, \\ (\alpha_1, \alpha_{2m}], & \text{если } i+j = m, \\ [\alpha_1, \alpha_{2(i+j-m)+1}), & \text{если } m+1 \leqslant i+j \leqslant 2m-1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $T\beta = \beta$, то

$$T^{2j-1}(\alpha_2, \beta) = (\beta, \alpha_{2j+1}), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$T^{2j-1}(\beta, \alpha_3) = \begin{cases} (\alpha_{2j+2}, \beta), & \text{если } 1 \leqslant j < m, \\ (\alpha_1, \beta), & \text{если } j = m. \end{cases}$$

Наконец, заметим, что при любом $x \leqslant \alpha_1$ $T^{2j-1}x = \alpha_{2j}$, $x \geqslant \alpha_{2m+1}$, $T^{2j-1}x = \alpha_{2j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Таким образом, $T^{2j-1}x > x$, когда $x < \beta$, $T^{2j-1}x < x$, если $x > \beta$, при любом $1 \leqslant j \leqslant m$ и, следовательно, у преобразования T отсутствуют циклы порядка $3, 5, \ldots, 2m-1$.

Теорему 4 можно обобщить на случай, когда у преобразования T существует цикл любого порядка, отличного от степени двойки.

Теорема 5. *Если у преобразования T есть цикл порядка $k = 2^n l$, где $l > 1$ — нечетное число, то преобразование T имеет циклы порядка $2^n r$, где $r > l$ — любое нечетное число, и циклы порядка $2^{n+1}s$, где s — любое натуральное число.*

Доказательство. Если $n = 0$, то получаем теорему 4, которая уже доказана. Предположим, утверждения теоремы верны при $n = m - 1$, и покажем, что они тогда верны и при $n = m$.

Пусть преобразование T имеет неподвижную точку α порядка $2^m l$. Покажем, например, что в этом случае T имеет и неподвижную точку порядка $2^m r_0$, $r_0 > l$ и нечетно. Для преобразования $S = T^2$ точка α есть неподвижная точка порядка $2^{m-1}l$ (лемма 2) и, согласно сделанному предложению, преобразование S должно иметь неподвижную точку β порядка $2^{m-1}r_0$. Это означает, что $S^{2^{m-1}r_0}\beta = \beta$, $S^j\beta \neq \beta$, $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{m-1}r_0 - 1$, то есть $T^{2^m r_0}\beta = \beta$ и $T^i\beta \neq \beta$ при любом четном i, меньшем $2^m r_0$; $T\beta \neq \beta$, так как в противном случае было бы $S\beta = \beta$. Итак, либо точка β — неподвижная точка порядка $2^m r_0$ преобразования T, либо точка β — неподвижная точка нечетного порядка, и тогда по теореме 3 у преобразования T существуют неподвижные точки любого четного порядка, и, следовательно, найдется неподвижная точка γ порядка $2^m r_0$.

Совершенно аналогично показывается, что у T есть и неподвижные точки порядка $2^{m+1}s$, где s — любое натуральное число.

Таким образом, утверждения теоремы 5 верны при любом n.

Теоремы 2, 3 и 5 и тот факт, что неподвижная точка первого порядка всегда существует, если есть неподвижные точки порядка выше первого, можно объединить в одну теорему.

Теорема 6. *Если у преобразования T есть цикл порядка 2^n, $n > 0$, то преобразование T имеет и циклы порядков 2^i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Если у преобразования T есть цикл порядка $2^n(2m+1)$, $n \geqslant 0$, $m > 0$, то преобразование имеет и циклы порядков 2^i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $2^n(2r+1)$, $r = m+1, m+2, \ldots, 2^{n+1}s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$*

Замечание. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — точки данного цикла k-го порядка и $a = \min\limits_i \alpha_i$, $b = \max\limits_i \alpha_i$. Утверждения теоремы 6 касаются лишь точек интервала $[a, b]$. Вне $[a, b]$ у преобразования, возможно, не имеется ни одной точки цикла. Так точки циклов преобразования $\bar{T}$: $\bar{T}x = Ta$, когда $x \leqslant a$, $\bar{T}x = Tx$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $\bar{T}x = Tb$, когда $x \geqslant b$, принадлежат $[a, b]$.

Назовем диаметром цикла $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ величину $d_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \max\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant k} |\alpha_i - \alpha_j|$. Для всякого n, следующего в (*) за k, найдется цикл $\beta_1, \ldots, \beta_n$, для которого $d_{\beta_1, \ldots, \beta_n} < d_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$. Кроме того, как легко видеть, существует постоянная C, зависящая от $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и такая, что для всякого $m > 1$, следующего в (*) за k, найдется цикл $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, для которого $d_{\gamma_1, \ldots, \gamma_m} > C$.

Построим пример, показывающий, что теорема 6 полностью решает вопрос о существовании циклов одних порядков в зависимости от существования циклов других порядков.

Пусть в плоскости (x, y) даны точки $A^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)})$, $A^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}), \ldots$, $A^k(x^{(k)}, y^{(k)})$, причем $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(k)}$. Эти точки определяют следующую непрерывную функцию $f(x)$: при $x \in [x^{(1)}, x^{(k)}]$ $f(x)$ есть кусочно-линейная функция с вершинами в точках $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ при $x \leqslant x^{(1)}$ $f(x) = y^{(1)} = \text{const}$, при $x \geqslant x^{(k)}$ $f(x) = y^{(k)} = \text{const}$. Преобразование, задаваемое такой функцией, обозначим через $T_{A^{(1)}A^{(2)}\ldots A^{(k)}}$.

Проведем построение, не вдаваясь в подробные пояснения.

Возьмем в плоскости две точки A_1 и A_2, симметричные относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Легко видеть, что преобразование $T_{A_1A_2}$ имеет лишь циклы первого и второго порядков. Проведем через точку A_1 прямую a_1, перпендикулярную биссектрисе, и через точку A_2 —прямую a_2, параллельную биссектрисе. Возьмем на a_1 точки A_{11} и A_{12}, симметричные относительно A_1, и на a_2 —точки A_{21} и A_{22}, симметричные относительно A_2, причем так, чтобы $|x_{11}-x_{12}|=|x_{21}-x_{22}|\leqslant\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}$ (через x_r обозначаем абсциссу точки A_r). Можно убедиться, что преобразование $T_{A_{11}A_{12}A_{21}A_{22}}$ имеет циклы только первого, второго и четвертого порядков. Теперь через точки A_{11}, A_{12}, A_{21} нужно провести прямые a_{11}, a_{12}, a_{21}, перпендикулярные биссектрисе, через точку A_{22} — прямую a_{22},

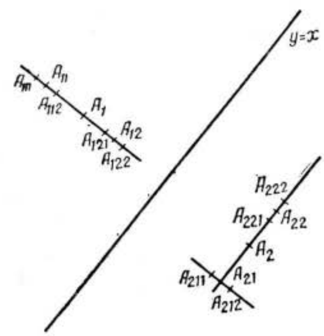

Рис. 9.

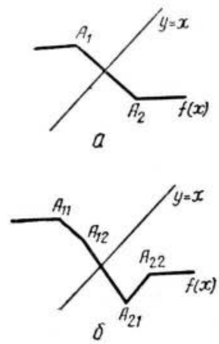

Рис. 10.

параллельную биссектрисе (очевидно, a_{11}, a_{12} совпадут с a_1, a_{22} — с a_2). Затем, как и выше, на этих прямых нужно взять точки A_{111}, A_{112}, A_{121}, . . ., A_{222}, симметричные относительно A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, с условием, что $|x_{111}-x_{112}|=|x_{121}-x_{122}|=|x_{211}-x_{212}|=|x_{221}-x_{222}|\leqslant\frac{|x_{11}-x_{12}|}{2}$ и т. д. Следует заметить, что прямые, параллельные (и перпендикулярные) биссектрисе, можно проводить через любые точки и через любое количество их, но обязательно нечетное. Преобразование $T_{A_{\underbrace{11\ldots 11}_{n+1}}A_{\underbrace{11\ldots 12}_{n+1}}\ldots A_{\underbrace{22\ldots 22}_{n+1}}}$ имеет лишь циклы порядка $1,\ 2,\ 2^2,\ldots,2^{n+1}$. Пусть для определенности прямая $\alpha_{\underbrace{11\ldots 11}_{n}}$ перпендикулярна биссектрисе. Заменим две точки $A_{\underbrace{111\ldots 11}_{n+1}}(x_{11\ldots 11}, y_{11\ldots 11})$, $A_{\underbrace{111\ldots 12}_{n+1}}(x_{11\ldots 12},\ y_{11\ldots 12})$ в плоскости (x, y) точками $A_{10}(x_{10},\ y_{10})$, $A_{20}(x_{20},\ y_{20}),\ldots,$ $A_{2m+1,0}(x_{2m+1,0}, y_{2m+1,0})$ (см. рис. 8), где

$$x_{10}=x_{\underbrace{11\ldots 11}_{n+1}}<x_{2m,0}<x_{2m-2,0}<\ldots<x_{20}<x_{30}<\ldots<x_{2m+1,0}=x_{\underbrace{11\ldots 12}_{n+1}},$$

$$y_{i0}=x_{i+1,0}+(y_{\underbrace{11\ldots 12}_{n+1}}-x_{\underbrace{11\ldots 11}_{n+1}}),\ i=1,2,\ldots,2m,\ y_{2m+1,0}=y_{\underbrace{11\ldots 12}_{n+1}}.$$

Нетрудно сообразить, что преобразование

$$T_{A_{10}A_{20}\ldots A_{2m+1,0}A_{\underbrace{11\ldots 21}_{n+1}}A_{\underbrace{11\ldots 22}_{n+1}}\ldots A_{\underbrace{22\ldots 22}_{n+1}}}$$

имеет циклы порядков $1,\ 2,\ 2^2,\ldots,2^n,\quad 2^n(2r+1),\ r\geqslant m,\ 2^{n+1}s,\ s>0$, и не имеет циклов никаких других порядков.

Теорема 6 и построенный пример и доказывают теорему, сформулированную в начале работы.

К теоремам 1—6 примыкает следующая теорема.

Теорема 7. *Между любыми двумя точками цикла порядка $k > 1$ лежит хотя бы одна точка цикла порядка $l < k$.*

Пусть $\alpha > \beta$ — точки цикла порядка k; n_α, n_β — количество точек этого цикла, меньших соответственно точек α и β. Очевидно, $k > n_\alpha > n_\beta \geq 0$. Существует n_α различных целых положительных чисел s_i, $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$, меньших k и таких, что $T^{s_i}\alpha < \alpha$. Так как $n_\alpha > n_\beta$, найдется s_{i_0}, $1 \leqslant i_0 \leqslant n_\alpha$, такое, что $T^{s_{i_0}}\alpha < \alpha$, $T^{s_{i_0}}\beta > \beta$. А это означает, что существует точка $\gamma \in (\beta, \alpha)$, для которой $T^{s_{i_0}}\gamma = \gamma$; γ есть точка цикла порядка $l \leqslant s_{i_0} < k$.

В заключение отметим еще, что все результаты можно перевести на язык периодических решений функционального уравнения $y(x+1) = f(y(x))$ (x пробегает дискретную последовательность значений). Например, если преобразование прямой в себя $y \to f(y)$ непрерывно, то 1) если функциональное уравнение имеет периодическое решение с периодом k, то у него есть и периодические решения с любым периодом, следующим в (*) за k, 2) если уравнение не имеет периодического решения с периодом k, то у него нет периодических решений ни с каким периодом, предшествующим k в (*).

Автор приносит благодарность Ю. М. Березанскому и Ю. А. Митропольскому, ознакомившимся с рукописью работы и давшим ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Шарковский, УМЖ, т. XII, № 4, 1960.
2. А. Н. Шарковский, ДАН СССР, т. 139, № 5, 1961.

Поступила 22.III 1962 г.
Киев

Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself

A. N. Sharkovsky

Summary

The basic result of this investigation may be formulated as follows. Consider a set of natural numbers in which the following relationship is introduced: n_1 precedes n_2 ($n_1 \preceq n_2$), if for any continuous mappings of the real line into itself the existence of a cycle of order n_2 follows from the existence of a cycle of order n_1. The following theorem holds.

Theorem. The introduced relationship transforms the set of natural numbers into an ordered set, ordered in the following way: $3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \ldots \prec 3\cdot 2 \prec 5\cdot 2 \prec \ldots \prec 3\cdot 2^2 \prec 5\cdot 2^2 \prec \ldots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$.